● $x \in \mathbb{R}$, $y \in]0, +\infty[$:

$h^{-1}(x) = y \Leftrightarrow h(y) = x$, cherchons y :

$y - \frac{1}{y} = x \Leftrightarrow y^2 - y.x - 1 = 0$

Résolution de l'équation : $y^2 - y.x - 1 = 0$

On a : $\Delta = x^2 + 4 > 0$

D'où

$\Leftrightarrow y = y_1 = \frac{x + \sqrt{x^2+4}}{2}$ ou bien $y = y_2 = \frac{x - \sqrt{x^2+4}}{2}$

Comme $h(1) = 0$ on aura $h^{-1}(0) = 1$,

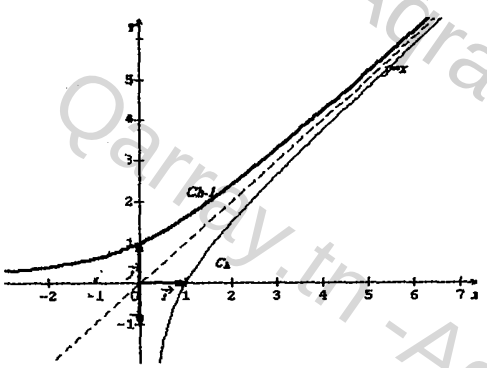
En remplacent x par 0 dans les expressions de y_1 et y_2 on trouve $y_1 = 1$

Ce qui prouve que : $\boxed{h^{-1}(x) = \frac{x + \sqrt{x^2+4}}{2}}$

● $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \overbrace{\frac{1}{x^2}}^{0} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) - x = \lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{1}{x} = 0$

Il résulte que la droite $\Delta : y = x$ est une asymptote oblique à C_h



Exercice n° 4

$f(x) = \text{tg}(x)$, $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

● f est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et on a :

$f'(x) = 1 + \text{tg}^2 x > 0$

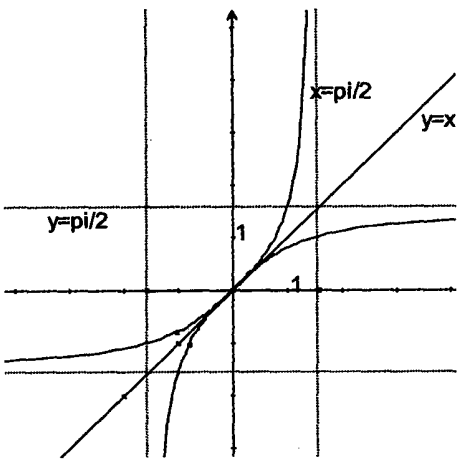
f continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

donc f est bijective

● $\lim\limits_{x \to (-\frac{\pi}{2})^+} f(x) = \lim\limits_{x \to (-\frac{\pi}{2})^+} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to (-\frac{\pi}{2})^-} f(x) = \lim\limits_{x \to (-\frac{\pi}{2})^-} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$

Donc les droites : $x = \frac{\pi}{2}$ et $x = -\frac{\pi}{2}$ sont deux asymptotes pour la courbe de f



Exercice n° 5

$f(x) = \frac{-1+2x}{6+3x}$

a) f est dérivable sur $]-2, +\infty[$ et on a :

$f'(x) = \frac{15}{(6+3x)^2} > 0$ $\quad \boxed{(\frac{ax+b}{cx+d})' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}}$

f est strictement croissante sur $]-2, +\infty[$

b) f est continue et strictement croissante sur $]-2, +\infty[$ d'où f réalise une bijection de $]-2, +\infty[$ sur l'intervalle

$I = f(]-2, +\infty[) = \left]\lim\limits_{x \to (-2)^+} f(x), \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)\right[$

$= \left]-\infty, \frac{2}{3}\right[$

c) $x \in \left]-\infty, \frac{2}{3}\right[$, $y \in]-2, +\infty[$

$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$, cherchons donc y :

$\frac{-1+2y}{6+3y} = x \Leftrightarrow 2y - 3xy = 1 + 6x$

$\Leftrightarrow y(2-3x) = 1 + 6x \Leftrightarrow y = \frac{1+6x}{2-3x}$

Donc $\boxed{f^{-1}(x) = \frac{1+6x}{2-3x}}$

Qarray.tn - Aqra Blech - Qarray.tn